Représentations associées à des graduations d'algèbres de Lie

{ Philippe Meyer sous la direction de Marcus Slupinski }

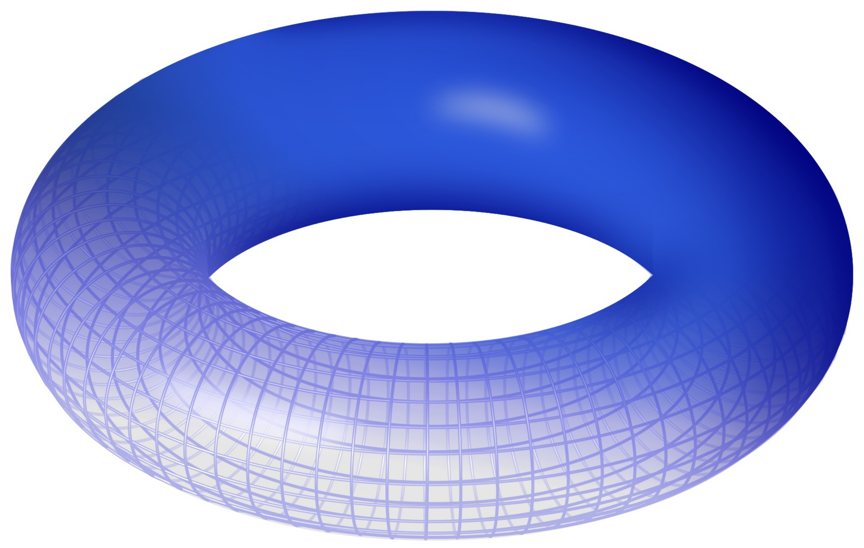
Groupe de Lie

Une notion fondamentale en science est celle de symétrie. En mathématiques elle se traduit en terme de **groupe**. Ces symétries peuvent être finies, discrètes ou continues comme celles que Sophus Lie a étudiées.

Un **groupe de Lie** est une variété munie d'une structure de groupe tel que les deux soient compatibles.

Exemples :

- Le cercle $\mathbb{S}^1$
- Le groupe orthogonal $O(n)$
- Le tore $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$



L'**algèbre de Lie** (ou groupe infinitésimal) $\mathfrak{g}$ d'un groupe de Lie G correspond à l'espace tangent en son élément neutre.

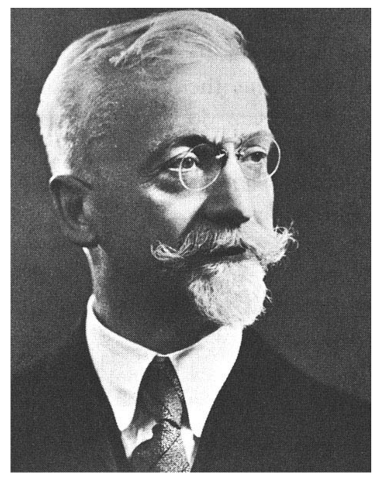
La loi du groupe de Lie peut se retranscrire d'une certaine manière sur l'algèbre de Lie comme un crochet bilinéaire $[\ ,\ ]$.

De nombreuses propriétés peuvent être étudiées sur $\mathfrak{g}$ puis retransmises sur le groupe G par intégration.

Histoire

Sophus Lie (1842-1899) : Mathématicien norvégien, créateur de la théorie des groupes et algèbres de Lie.

Elie Cartan (1869-1951) : Mathématicien français ayant classifié les algèbres de Lie et les espaces symétriques.



Constructions de $\mathfrak{g}_2$

Soit k un corps. Le groupe $GL_2(k)$ agit naturellement sur l'espace des **cubiques binaires** :

$$S^3(k^{2*}) = \{ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3\}.$$

Ceci induit une représentation au niveau de l'espace tangent $\rho : \mathfrak{gl}_2(k) \to End(S^3(k^{2*}))$, et si l'on restreint ρ à $\mathfrak{su}(2)$ et $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})$ on construit :

$$\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus S^3(\mathbb{C}^{2*})|_{\mathbb{R}} \cong \mathfrak{g}_2^{comp}$$

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus (S^3(\mathbb{R}^{2*}) \otimes \mathbb{R}^2) \cong \mathfrak{g}_2^{dep}.$$

Classification de Killing-Cartan

Les algèbres de Lie complexes semi-simples ont été classifiées à la fin du XIXe siècle par Wilhelm Killing et Elie Cartan. Il y a trois familles infinies :

$$\mathfrak{sl}(n) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid Tr(M) = 0\}$$
$$\mathfrak{so}(n) = \{M \in M_n(\mathbb{C}) \mid M^t = -M\}$$
$$\mathfrak{sp}(2n) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid \Omega M + M^t\Omega = 0\}$$

et cinq algèbres de Lie exceptionnelles

$$\mathfrak{g}_2, \mathfrak{f}_4, \mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8.$$

Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie complexe simple. Sur $\mathbb{R}$, $\mathfrak{g}$ possède une forme réelle **compacte** et une forme réelle **déployée**.

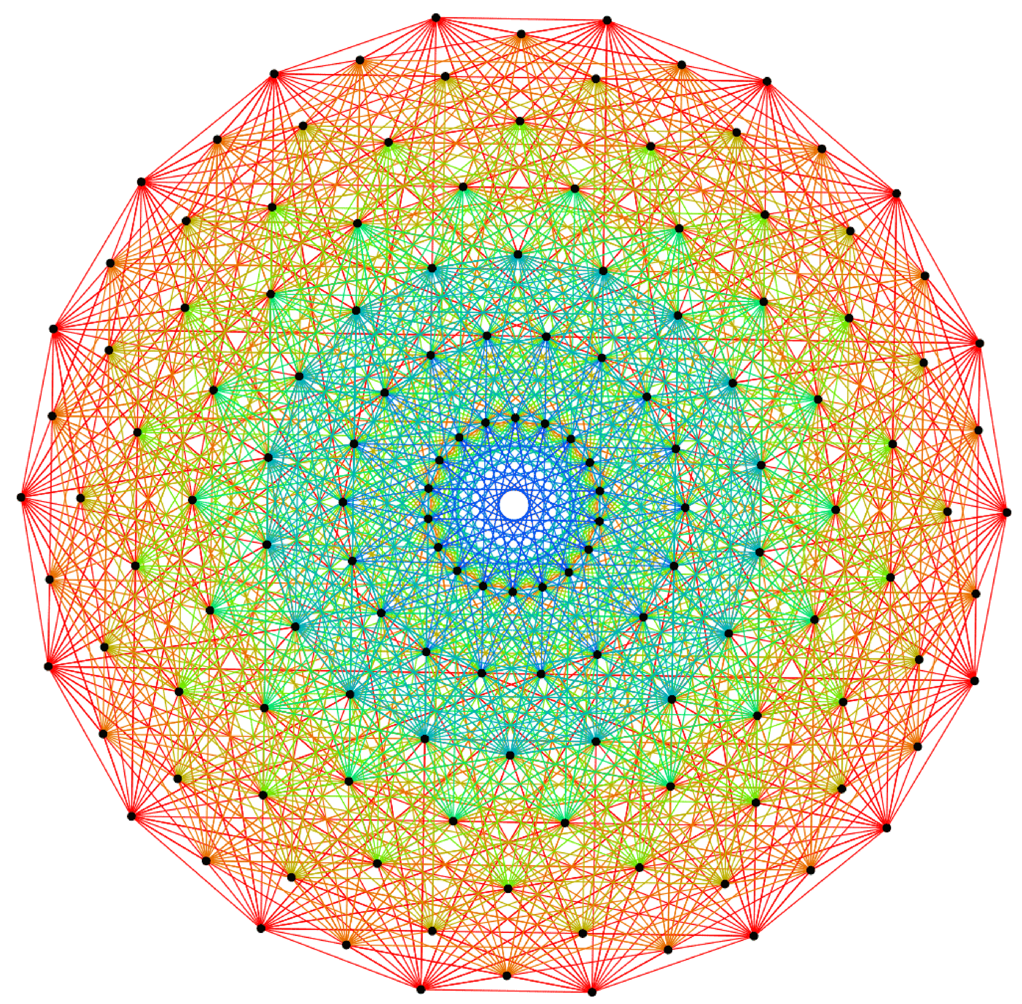


Figure 1: Système de racines de $\mathfrak{e}_8$

Recherche

S-représentations :

Dans [MS13] les auteurs proposent une construction de la forme compacte de $\mathfrak{g}$ avec une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-graduation :

$$\mathfrak{h}^{comp} \oplus \mathfrak{sp}(1) \oplus \mathfrak{m}.$$

Cette structure provient de la théorie des **espaces symétriques**. A partir d'une représentation $\rho : \mathfrak{h} \to End(\mathfrak{m})$ on peut reconstruire une algèbre de Lie compacte à condition qu'elle vérifie l'obstruction du Casimir :

$$\tilde{\rho}(Cas_{\mathfrak{h}}) = 0.$$

Graduations de Heisenberg :

Dans [SS15] les auteurs proposent une construction de la forme déployée de $\mathfrak{g}$ avec une $\mathbb{Z}$-graduation :

$$\mathfrak{h}^{dep} \oplus \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \oplus (\mathfrak{m} \otimes \mathbb{R}^2).$$

A partir d'une représentation symplectique $\rho : \mathfrak{h} \to End(\mathfrak{m})$ on peut reconstruire une algèbre de Lie déployée à condition que l'application moment $\mu : \mathfrak{m} \to \mathfrak{h}$ vérifie l'identité de Cahen-Schwachhöfer :

$$2B_\mu(A,B)\cdot C - 2B_\mu(A,C)\cdot B = 2\omega(B,C)A - \omega(A,B)C + \omega(A,C)B.$$

Références

[Lam04] Tsi-Yuen Lam. *Introduction to quadratic forms over fields*. American Mathematical Society, 2004.

[MS13] Andrei Moroianu and Uwe Semmelmann. Invariant four-forms and symmetric pairs. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 43(2):107–121, 2013.

[SS15] Marcus Slupinski and Robert Stanton. The geometry of special symplectic representations. *Journal of Algebra*, 428:149–189, April 2015.

Problèmes

1. Comprendre la structure des algèbres de Lie simples de dimension 3 sur un corps arbitraire.
2. Relier les deux familles de graduations puis généraliser en une famille commune.
3. Retranscrire les propriétés d'une graduation à l'autre.